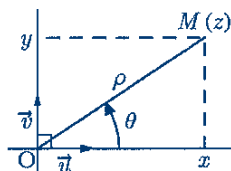


**BACCALAURÉAT, SÉRIE S**  
**ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE ET ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**  
**FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES**

**I. NOMBRES COMPLEXES, GÉOMÉTRIE**

**A. NOMBRES COMPLEXES**

Dans le repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  le point  $M(x, y)$ , où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , a pour affixe  $z$ .



$z$  a pour forme algébrique  $x + iy$ .

Partie réelle de  $z$  :  $\operatorname{Re}(z) = x$

Partie imaginaire de  $z$  :  $\operatorname{Im}(z) = y$

Conjugué de  $z$  :  $\bar{z} = x - iy$

Module de  $z$  :  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Si  $z \neq 0$ ,

$z$  a pour forme trigonométrique :  $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$

$z$  a pour forme exponentielle :  $z = \rho e^{i\theta}$

Module de  $z$  :  $|z| = \rho$

Argument de  $z$  :  $\arg z = \theta [2\pi]$

Conjugué de  $z$  :  $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$

*Propriétés des modules*

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|\bar{z}| = |z|$

Pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$

Pour tous  $z \in \mathbb{C}$  et  $z' \in \mathbb{C}$ ,  $|zz'| = |z| |z'|$

Si  $A$  et  $B$  ont pour affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$  alors  $\overrightarrow{AB}$  a pour affixe  $z_B - z_A$  et  $AB = |z_B - z_A|$ .

*Propriétés des arguments*

Pour tous  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $z' \in \mathbb{C}^*$ ,

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$

*Caractérisation complexe de transformations  $M(z) \mapsto M'(z')$*

Translation de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $t$ ,  $t \in \mathbb{C}$  :  $z' = z + t$

Homothétie de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{C}$ , et de rapport

$$k \in \mathbb{R}^* : z' - \omega = k(z - \omega)$$

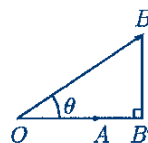
Rotation de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{C}$ , et d'angle de

$$\text{mesure } \theta \in \mathbb{R} : z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

**B. GÉOMÉTRIE**

*Produit scalaire de deux vecteurs non nuls du plan*

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos \theta$$



*Produit scalaire et coordonnées*

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  admettent pour coordonnées respectives

$(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  dans un repère orthonormal

de l'espace alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$  et  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ .

Une équation de la sphère de centre  $\Omega$  de coordonnées

$$(a, b, c) \text{ et de rayon } R \text{ est } (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

**II. ALGÈBRE, TRIGONOMÉTRIE**

**A. IDENTITÉS REMARQUABLES**

Pour tous  $a \in \mathbb{C}$ ,  $b \in \mathbb{C}$ ,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Pour tous  $a \in \mathbb{C}$ ,  $b \in \mathbb{C}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

**B. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ DANS  $\mathbb{C}$**

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois nombres réels ( $a \neq 0$ ) et  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

L'équation  $az^2 + bz + c = 0$  admet :

- lorsque  $\Delta > 0$ , deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- lorsque  $\Delta = 0$ , une solution réelle  $z_1 = -\frac{b}{2a}$

- lorsque  $\Delta < 0$ , deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$\text{Si } \Delta \neq 0, \quad az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

$$\text{Si } \Delta = 0, \quad az^2 + bz + c = a(z - z_1)^2$$

**C. TRIGONOMÉTRIE**

*Formules d'addition*

Pour tous  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ ,  
 $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$   
 $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$   
 $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$   
 $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

*Formules de duplication*

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  
 $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$   
 $\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$   
 $\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$   
 $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

**III. PROBABILITÉS**

**A. GÉNÉRALITÉS**

Si les événements  $A$  et  $B$  sont incompatibles alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Dans le cas général :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad P(\Omega) = 1 \quad P(\emptyset) = 0$$

Si  $A_1, \dots, A_n$  forment une partition de  $A$ ,  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ .

Dans le cas de l'équiprobabilité,

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$$

*Probabilité conditionnelle de B sachant A*

$P_A(B)$  est définie par  $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

Cas où  $A$  et  $B$  sont indépendants :  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

*Formule des probabilités totales*

Si les événements  $B_1, B_2, \dots, B_n$  forment une partition de  $\Omega$  alors  $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$

**B. VARIABLE ALÉATOIRE**

Espérance mathématique :  $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

Variance :  $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$

Ecart-type :  $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

**C. COMBINAISONS ET FORMULE DU BINÔME**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq p \leq n$ ,

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \quad 0! = 1.$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Le nombre de sous-ensembles à  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments est égal à  $\binom{n}{p}$ .

Pour tous  $a \in \mathbb{C}$ ,  $b \in \mathbb{C}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

**D. LOIS DE PROBABILITÉ**

*Loi de Bernoulli de paramètre p*,  $p \in [0; 1]$

$X$  peut prendre les valeurs 0 et 1 avec les probabilités

$$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = 0) = 1 - p$$

$$E(X) = p \quad V(X) = p(1 - p)$$

*Loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$* ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in [0; 1]$

$X$  peut prendre les valeurs entières 0, 1, ..., n

$$\text{Pour } 0 \leq k \leq n, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$E(X) = n p \quad V(X) = n p (1 - p)$$

*Loi uniforme sur [0; 1]*

$J$  étant un intervalle inclus dans  $[0; 1]$ ,

$$P(J) = \text{longueur de } J$$

*Loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  sur  $[0; +\infty[$ ,*

*dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement*

$$\text{Pour } 0 \leq a \leq b, P([a, b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$\text{Pour tout } c \geq 0, P([c, +\infty[) = 1 - \int_0^c \lambda e^{-\lambda t} dt$$

## IV. ANALYSE

## A. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suite arithmétique de premier terme  $u_0 \in \mathbb{R}$  et de raison  $a \in \mathbb{R}$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + a$

$$u_n = u_0 + n a$$

Suite géométrique de premier terme  $u_0 \in \mathbb{R}$  et de raison  $b \in \mathbb{R}^*$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = b u_n$

$$u_n = u_0 b^n$$

Somme de termes

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Si } b \neq 1 \text{ alors } 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}.$$

Limite d'une suite géométrique

$$\text{Si } 0 < b < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = 0.$$

$$\text{Si } b > 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = +\infty.$$

## B. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE FONCTIONS USUELLES

## 1. Fonctions exponentielles et logarithmes

$$e^0 = 1$$

Pour tous réels  $a$  et  $b$ ,

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad (e^a)^b = e^{ab}$$

$$\text{Pour tout } x \in ]0; +\infty[, \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$$\ln 1 = 0 \quad \ln e = 1$$

Pour tous  $a > 0$  et  $b > 0$ ,

$$\ln a b = \ln a + \ln b \quad \text{et} \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

Pour tout  $a \in ]0; +\infty[$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$a^x = e^{x \ln a} \quad \ln(a^x) = x \ln a$$

$$\text{Pour tout } x \in ]0; +\infty[, \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $y \in ]0; +\infty[$ ,

$$y = e^x \text{ équivaut à } x = \ln y.$$

2. Racine  $n^{\text{ème}}$ 

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tous  $x \in [0; +\infty[$  et  $y \in [0; +\infty[$ ,

$$y = \sqrt[n]{x} \text{ équivaut à } x = y^n.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

## C. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$$

Comportement à l'origine de  $\ln(1+x)$ ,  $e^x$ ,  $\sin x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

## D. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives sur des intervalles convenables. Les hypothèses permettant de les utiliser doivent être vérifiées par les candidats.

### 1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
$k$	$0$
$x$	$1$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$n x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$e^x$
$a^x$	$a^x \times \ln a$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

### 2. Opérations sur les dérivées

$$(u + v)' = u' + v' \quad (k u)' = k u' \quad k \text{ étant une constante}$$

$$(u v)' = u' v + u v' \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2} \quad (v \circ u)' = (v' \circ u) u'$$

$$(e^u)' = e^u u' \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

## E. CALCUL INTÉGRAL

Les hypothèses permettant d'utiliser les formules suivantes doivent être vérifiées par les candidats.

Formules fondamentales

$$\text{Si } F \text{ est une primitive de } f \text{ alors } \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$$

$$\text{Si } g(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ alors } g'(x) = f(x).$$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

Positivité

$$\text{Si } a \leq b \text{ et } f \geq 0 \text{ alors } \int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

Ordre

$$\text{Si } a \leq b \text{ et } f \leq g \text{ alors } \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

Inégalité de la moyenne

$$\text{Si } a \leq b \text{ et } m \leq f \leq M \text{ alors } m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$$

Intégration par parties

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

$$\text{La valeur moyenne de } f \text{ sur } [a, b] \text{ (} a \neq b \text{) est } \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

## F. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Pour tous  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ , les solutions de l'équation différentielle  $y' = a y + b$  sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

## ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

### A. CONGRUENCES

Pour tous  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $n \geq 2$ ,

si  $a \equiv b [n]$  et  $a' \equiv b' [n]$ , alors

$$a + a' \equiv b + b' [n] \quad a - a' \equiv b - b' [n]$$

$$a a' \equiv b b' [n] \quad a^p \equiv b^p [n]$$

### B. CARACTÉRISATION COMPLEXE DES SIMILITUDES

– Similitude directe :  $z' = a z + b$  où  $a \in \mathbb{C}^*$ ,  $b \in \mathbb{C}$

– Similitude indirecte :  $z' = a \bar{z} + b$  où  $a \in \mathbb{C}^*$ ,  $b \in \mathbb{C}$

Dans les deux cas, le rapport de la similitude est égal à  $|a|$

### C. ENSEMBLES DE POINTS

Dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , une équation du cylindre d'axe  $(O; \vec{k})$  et de rayon  $r > 0$  est  $x^2 + y^2 = r^2$ .

Une équation d'un cône d'axe  $(O; \vec{k})$  est  $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \theta$ .

