Devoir maison Nª 1 sur les limites

Elément de correction du DM Nª1

On travaille sur I = [0 : $\frac{\pi}{2}$ [ou J =] 0 : $\frac{\pi}{2}$ [

Partie A

- Bien justifier que les fonctions définies et dérivables sur l'intervalle d'étude (cela enlève des points au bac…)
- IL FAUT ETUDIER LE SIGNE DE LA DERIVEE : RESOUDRE F'(X) = 0 NE SUFFIT PAS
- Pour l'étude de signe : revenir à la définition du sens de variation d'une fonction.

1. a. f(x) = sin(x) –x définie et dérivable sur I (différence de fonction de référence) et f'(x) = cos(x) – 1. Or cos(x) < 1 donc cos(x) – 1 < 0. f' est donc négatif d'où f est décroissante.
   b. Comme f décroissante sur I et f(0) = sin(0) – 0 = 0 alors $\forall$ x dans I , f(x) ≤ f(0) donc f(x) ≤ 0.

2. a. g(x) = tan(x) –x définie et dérivable sur I (différence de fonction de référence) et
   g'(x) = 1 + tan ^{2}(x) + 1 – 1 . ATTENTION (tan(x))' = $\frac{1}{\cos(x)^2}$ = 1 +tan ^{2}(x) (voir partie exercice).
   Donc g'(x) = tan ^{2}(x)≥ 0 . g' est donc positive d'où g est croissante.
   b. Comme g croissante sur I et g(0) = tan(0) – 0 = 0 alors $\forall$ x dans I , g(0) ≤ g(x) donc 0 ≤g(x)
3. On a alors sin(x) –x ≤ 0 $\Rightarrow$ sin(x) ≤ x et tan(x) –x ≥ 0 $\Rightarrow$ tan(x) ≥ x. Donc sin(x) ≤ x ≤ tan(x)

Partie B

1. a. sin(x) ≤ x ≤ tan(x). Or sur J, x>0 et sin(x) > 0. De plus tan(x) = $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ donc

   sin(x) ≤ x ≤ $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. En divisant par sin(x) >0 $\Rightarrow$ 1 ≤ $\frac{x}{\sin(x)}$≤ $\frac{1}{\cos(x)}$ puis en inversant sur les positifs (changement de sens…) cos(x) ≤ $\frac{\sin(x)}{x}$ ≤ 1.

   b. D'après le théorème des gendarmes, comme lim$\lim\limits_{x\to 0}$ cos(x) = 1 et $\lim\limits_{x\to 0}$ 1 = 1 alors comme cos(x) ≤ $\frac{\sin(x)}{x}$ ≤ 1, on a $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

2. $\mathbb{R}^*$ est ensemble symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

Ce qui prouve bien que la fonction f est paire.

En conséquence, elle admet une limite à gauche de 0 égale à sa limite à droite de 0, d'où :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

3. Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$, on a :

$$\frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos x}{x^2}$$

4. Nous savons que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, donc par produit : $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$.

Nous savons également que $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \cos x) = 2$, donc par inverse : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$.

D'où, par produit : $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

En outre $\lim\limits_{x\to 0} (-x) = 0$, donc : $$\lim_{x\to 0} (-x) \times \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Conclusion : $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$